

# Décision dans le risque et l'incertain

Jean-Marc Tallon

(EEP, U. Paris I)

15 Novembre 2010

## Introduction

- Panorama rapide de la théorie de la décision (risque et incertain).
  - Risque: situation dans laquelle une distribution de probabilité “objective” existe
  - Incertain: tout le reste!

## Introduction

- Panorama rapide de la théorie de la décision (risque et incertain).
  - Risque: situation dans laquelle une distribution de probabilité “objective” existe
  - Incertain: tout le reste!
- Théorie de la **décision**: fournit des critères de décision.  
Constructions les plus répandues:
  - Dans le risque: fonction d'utilité et du critère de décision
  - Dans l'incertain: fonction d'utilité, distribution de probabilité représentant les “croyances” et critère de décision

## Introduction

- Panorama rapide de la théorie de la décision (risque et incertain).
  - Risque: situation dans laquelle une distribution de probabilité “objective” existe
  - Incertain: tout le reste!
- Théorie de la **décision**: fournit des critères de décision.  
Constructions les plus répandues:
  - Dans le risque: fonction d'utilité et du critère de décision
  - Dans l'incertain: fonction d'utilité, distribution de probabilité représentant les “croyances” et critère de décisionmais souffrent de quelques problèmes.

## Introduction

- Cadre méthodologique adopté dans cette littérature:
    - préférences révélées: seuls les choix sont observables.
    - approche axiomatique: a priori testable.
- ↪ choix individuel plutôt que collectif. Beaucoup de place pour la “subjectivité” du décideur.

## Introduction: Historique rapide

- Pères fondateurs
  - Risque: Bernoulli évidemment! von Neumann-Morgenstern (1944)
  - Incertain: de Finetti, Ramsey, Savage (1954)
- Expériences et remises en cause
  - Allais (1953)
  - Ellsberg (1961)
  - Kahneman & Tversky, 1970-1990.
- Développements récents
  - Quiggin, Yaari, Wakker,...
  - Schmeidler, Gilboa, Marinacci,...
  - Remise en cause plus radicale: Thaler, Rabin,...

## Plan

### Risque

- vNM: cadre d'analyse, axiomes, aversion pour le risque
- Rank dependent expected utility

### Incertain

- La construction de Savage
- L'expérience d'Ellsberg et la difficulté à concevoir des probabilités subjectives
- Les modèles d'ambiguïté

## vNM: cadre

- $X$  un ensemble quelconque. Objets de choix sont des loteries à support fini sur  $X$ .

$$L = \left\{ \mathbb{P} : X \rightarrow [0, 1] \mid \mathbb{P} \text{ a un support fini et } \sum_{x \in X} \mathbb{P}(x) = 1 \right\}.$$

- Mixage:

$$(\alpha\mathbb{P} + (1 - \alpha)\mathbb{Q})(x) = \alpha\mathbb{P}(x) + (1 - \alpha)\mathbb{Q}(x)$$

pour tout  $x \in X$ .

- la relation objet de l'axiomatisation est une relation binaire sur  $L$ ,  $\succsim \subset L \times L$ .

vNM: axiomes

**Axiome 1 vNM: préordre:**  $\succsim$  est un préordre complet et transitif.

vNM: axiomes

**Axiome 1 vNM: préordre:**  $\succsim$  est un préordre complet et transitif.

**Axiome 2 vNM: continuité:** Pour tout  $P, Q, R \in L$ , si  $P \succ Q \succ R$ , alors il existe  $\alpha, \beta \in (0, 1)$  tel que

$$\alpha P + (1 - \alpha)R \succ Q \succ \beta P + (1 - \beta)R.$$

vNM: axiomes

**Axiome 1 vNM: préordre:**  $\succsim$  est un préordre complet et transitif.

**Axiome 2 vNM: continuité:** Pour tout  $\mathbb{P}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \in L$ , si  $\mathbb{P} \succ \mathbb{Q} \succ \mathbb{R}$ , alors il existe  $\alpha, \beta \in (0, 1)$  tel que

$$\alpha\mathbb{P} + (1 - \alpha)\mathbb{R} \succ \mathbb{Q} \succ \beta\mathbb{P} + (1 - \beta)\mathbb{R}.$$

**Axiome 3 vNM: indépendance:** Pour tout  $\mathbb{P}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \in L$ , et tout  $\alpha \in (0, 1)$ ,

$$\mathbb{P} \succsim \mathbb{Q} \quad \text{ssi} \quad \alpha\mathbb{P} + (1 - \alpha)\mathbb{R} \succsim \alpha\mathbb{Q} + (1 - \alpha)\mathbb{R}.$$

### vNM: théorème

$\succsim \subset L \times L$  satisfait les 3 axiomes précédents si et seulement si il existe  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que, pour tout  $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \in L$

$$\mathbb{P} \succsim \mathbb{Q} \quad \text{ssi} \quad \sum_{x \in X} \mathbb{P}(x)u(x) \geq \sum_{x \in X} \mathbb{Q}(x)u(x).$$

De plus,  $u$  est unique à une transformation affine positive près.

## Aversion pour le risque

- Dans le cas continu ( $F$  est la fonction de répartition):

$$U(F) = \int u(x)dF(x)$$

- Un décideur est (faiblement) adverse du risque si pour tout  $F$ , la loterie dégénérée qui donne  $\int x dF(x)$  de manière certaine est préférée ou indifférente à  $F$ .
- Dans vNM:

$$\int u(x)dF(x) \leq u\left(\int x dF(x)\right)$$

- Théorème: dans le modèle d'espérance d'utilité, l'aversion vis-à-vis du risque est équivalente à la concavité de la fonction d'utilité de Bernouilli.
- Mesure: coefficient d'aversion pour le risque =  $-\frac{u''}{u'}$

## Allais

Différente loteries dont les prix peuvent être:

1er prix = 2 500 000 euros; 2nd = 500 000 euros; 3ème = 0 euro.

Choix 1:  $\mathbb{L}_1 = (0, 1, 0)$  vs  $\mathbb{L}'_1 = (.10, .89, .01)$ .

## Allais

Différente loteries dont les prix peuvent être:

1er prix = 2 500 000 euros; 2nd = 500 000 euros; 3ème = 0 euro.

Choix 1:  $\mathbb{L}_1 = (0, 1, 0)$  vs  $\mathbb{L}'_1 = (.10, .89, .01)$ .

Choix 2:  $\mathbb{L}_2 = (0, .11, .89)$  vs  $\mathbb{L}'_2 = (.10, 0, .90)$ .

## Allais

Différente loteries dont les prix peuvent être:

1er prix = 2 500 000 euros; 2nd = 500 000 euros; 3ème = 0 euro.

Choix 1:  $\mathbb{L}_1 = (0, 1, 0)$  vs  $\mathbb{L}'_1 = (.10, .89, .01)$ .

Choix 2:  $\mathbb{L}_2 = (0, .11, .89)$  vs  $\mathbb{L}'_2 = (.10, 0, .90)$ .

Observe souvent:  $\mathbb{L}_1 \succ \mathbb{L}'_1$  et  $\mathbb{L}'_2 \succ \mathbb{L}_2$ , en violation de l'axiome d'indépendance.

Sous vNM:  $\mathbb{L}_1 \succ \mathbb{L}'_1$  implique  $u_{05} > .10u_{25} + .89u_5 + .01u_0$ .

Si l'on ajoute  $.89u_0 - .89u_{05}$  des deux côtés, on obtient:

$$.11u_{05} + .89u_0 > .10u_{25} + .90u_0$$

## Allais

Différente loteries dont les prix peuvent être:

1er prix = 2 500 000 euros; 2nd = 500 000 euros; 3ème = 0 euro.

Choix 1:  $\mathbb{L}_1 = (0, 1, 0)$  vs  $\mathbb{L}'_1 = (.10, .89, .01)$ .

Choix 2:  $\mathbb{L}_2 = (0, .11, .89)$  vs  $\mathbb{L}'_2 = (.10, 0, .90)$ .

Observe souvent:  $\mathbb{L}_1 \succ \mathbb{L}'_1$  et  $\mathbb{L}'_2 \succ \mathbb{L}_2$ , en violation de l'axiome d'indépendance.

Sous vNM:  $\mathbb{L}_1 \succ \mathbb{L}'_1$  implique  $u_{05} > .10u_{25} + .89u_5 + .01u_0$ .

Si l'on ajoute  $.89u_0 - .89u_{05}$  des deux côtés, on obtient:

$$.11u_{05} + .89u_0 > .10u_{25} + .90u_0$$

c'est-à-dire  $\mathbb{L}_2 \succ \mathbb{L}'_2$ .

## RDEU

Loterie monétaire  $(x_1, p_1; \dots; x_n, p_n)$  où  $x_1 \geq \dots \geq x_n \geq 0$ . L'utilité dépendant du rang s'écrit

$$V((x_1, p_1; \dots; x_n, p_n)) = \sum_{i=1}^n f\left(\sum_{j=1}^i p_j\right) [u(x_i) - u(x_{i+1})]$$

avec la convention que  $x_{n+1} = 0$  et  $u(x_{n+1}) = 0$ .

- $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , croissante,  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ .
- $f$  s'applique à la fonction décumulée et non aux probabilités.
- Si  $f$  est linéaire, retrouve vNM.
- $f$  est "subjective" (comme  $u$ ). Souvent trouvé que  $f$  est "en forme de S inversé". Capture en partie aversion pour le risque.

## SECONDE PARTIE: INCERTAIN

- Notion de probabilité “objective” difficile à défendre dans de nombreux cas.
- Faut-il pour autant abandonner l'idée d'utiliser les probabilités pour représenter les croyances?
- (Dit autrement: pourquoi les croyances devraient-elles être probabilistes?)
- De Finetti, Ramsey: arguments basés sur la “rationalité”.  
[pendant de vNM: se donne la fonction d'utilité et dérive la probabilité].
- Mais “chef d'oeuvre” du domaine: Savage, qui dérive les croyances et la fonction d'utilité.

## Savage: cadre

- $S$ : ensemble des états de la nature
- $X$ : ensemble des résultats
- $f : S \rightarrow X$ : acte ou décision
- Acte constant:  $f(s) = x$  pour tout  $s \in S$
- notation:  $f_A g$ ; acte donnant  $f$  sur  $A \subset S$  et  $g$  sur  $A^c$

## Savage: axiomes

- **P1:**  $\succeq$  est un préordre total.

- **P2:** Soit 4 actes  $f, g, f', g'$  et un événement  $A$ . Si

$$f(s) = f'(s) \quad g(s) = g'(s) \quad s \in A$$

$$f(s) = g(s) \quad f'(s) = g'(s) \quad s \notin A$$

alors,  $f \succeq g \Leftrightarrow f' \succeq g'$ .

- **P3:** Pour tout  $f$  et tout événement non nul  $A$  et tout résultat

$$x, y: x \succeq y \Leftrightarrow x_A f \succeq y_A f$$

- **P4:** Pour tout  $A, B$ , et tout  $x, y, w, z$  tels que  $x \succ y$  et  $z \succ w$ ,

$$x_A y \succeq x_B y \Leftrightarrow z_A w \succeq z_B w$$

- **P5:** Il existe  $f$  et  $g$  tels que  $f \succ g$ .

- **P6** et **P7** sont des axiomes techniques.

### Savage: théorème

$\succsim$  satisfait P1 à P7 si et seulement si il existe une mesure  $\mu$  sur  $S$  et une fonction non constante, bornée  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  tels que, pour tout  $f$  et  $g$

$$f \succsim g \Leftrightarrow \int_S u(f(s))d\mu(s) \geq \int_S u(g(s))d\mu(s)$$

$\mu$  est unique et  $u$  est définie à une fonction affine positive près.

$\mu$  : probabilité subjective

## Ellsberg

Une urne est remplie de 90 boules dont 30 sont rouges et le reste jaunes ou noires sans autres indications.

	R	J	N
r	1	0	0
j	0	1	0
nr	0	1	1
nj	1	0	1

*r vs j?*

*nr vs nj ?*

## Ellsberg

Une urne est remplie de 90 boules dont 30 sont rouges et le reste jaunes ou noires sans autres indications.

	R	J	N
r	1	0	0
j	0	1	0
nr	0	1	1
nj	1	0	1

$r$  vs  $j$ ?

$nr$  vs  $nj$  ?

En général, observe  $r \succ j$  et  $nr \succ nj$ .

## Espérance d'utilité de Choquet

- Capacité ou mesure non additive: fonction  $\nu$  d'une algèbre  $\mathcal{A}$  dans  $[0, 1]$  telle que  $\nu(\emptyset) = 0$ ,  $\nu(S) = 1$ , et si  $E \subset F$ ,  $E, F \in \mathcal{A}$ ,  $\nu(E) \leq \nu(F)$ .
- Un acte  $f$  est préféré à  $g$  ssi il existe  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\nu$  telles que

$$\int_{Ch} u(f) d\nu \geq \int_{Ch} u(g) d\nu$$

où l'intégrale est une intégrale de Choquet.

## Espérance d'utilité de Choquet

- Capacité ou mesure non additive: fonction  $\nu$  d'une algèbre  $\mathcal{A}$  dans  $[0, 1]$  telle que  $\nu(\emptyset) = 0$ ,  $\nu(S) = 1$ , et si  $E \subset F$ ,  $E, F \in \mathcal{A}$ ,  $\nu(E) \leq \nu(F)$ .
- Un acte  $f$  est préféré à  $g$  ssi il existe  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\nu$  telles que

$$\int_{Ch} u(f) d\nu \geq \int_{Ch} u(g) d\nu$$

où l'intégrale est une intégrale de Choquet.

- Soit  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  et  $f$  tel que  $f(s_i) = x_i$ ,  $i = 1..n$  où  $x_i \leq x_{i+1}$ .

Alors,  $\int_{Ch} u(f) d\nu =$

$$u(x_1) + (u(x_2) - u(x_1))\nu(\{s_2, s_3, \dots, s_n\}) + \dots + (u(x_{i+1}) - u(x_i))\nu(\{s_{i+1}, \dots, s_n\}) + \dots + (u(x_n) - u(x_{n-1}))\nu(\{s_n\})$$

## Croyances multiples

$f \succsim g$  si et seulement si

$$\min_{p \in C} E_p u(f) \geq \min_{p \in C} E_p u(g)$$

$C$  est un ensemble de croyances, défini de manière unique.  $u$  est unique à une fonction affine croissante près.

Axiome clé: aversion à l'incertitude. Cadre à la Anscombe-Aumann (espace des résultats est un ensemble de loteries, i.e.,  $f(s)$  est une loterie), qui permet le mixage des actes.

$$f \sim g \Rightarrow \alpha f + (1 - \alpha)g \succsim f.$$

- Liens avec modèle d'espérance de Choquet
- Pas de mesure de l'aversion pour l'ambiguïté.

## Smooth Ambiguity Aversion

$$\sum_{\theta \in \Theta} \mu(\theta) \Phi \left( \sum_{s \in S} p(s; \theta) u(f(s)) \right)$$

où  $f$  est un acte donnant un paiement  $f(s)$  dans l'état  $s$ ,  $u$  est la fonction d'utilité et  $\Phi$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .  $\Phi$  représente l'aversion vis-à-vis de l'incertain.

Interprétation: chaque  $p \in C$  représente un scénario possible indexé par  $\theta$ ;  $\mu$  croyance probabiliste sur ces scénarii.

- "Espérance d'utilité des espérances d'utilité":  $\mathbb{E}_{\mu} \Phi (E_p(u(f)))$
- Mesures:
  - $\Phi$  linéaire  $\Rightarrow$  espérance d'utilité.
  - $\Phi$  concave reflète de l'aversion vis-à-vis de l'incertain.  $-\frac{\Phi''}{\Phi'}$

## Conclusion

- Domaine de recherche très actif à l'heure actuelle.
- Remarquable que la notion de "probabilité subjective" ait autant de mal à "s'imposer".
- Problème de révélation des fonctions d'utilité, des croyances, ...  
Sujet de plus en plus abordé. Problème opérationnel et "stratégique".